Lycée Pilote Monastir	Devoir de Synthèse n° : 1 — 3 Math$_{1-2-3-4}$
	MATHEMATIQUES
Profs : Zemni–Yacoubi Younes–Hassen	Durée : 2 h — Le 5/12/2012

Exercice 1 :(3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est correcte. Indiquer sur votre copie le numéro et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct et de coté $a > 0$.

a) Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est :

i) $-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ j) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ k) a^2

b) L'ensemble (E) = $\{ M \in P \,/\, MA^2 + MB^2 = a^2 \}$ est :

i) La droite (AB)

j) Le cercle de diamètre [AB]

k) Le cercle de centre I = A*B et de rayon a.

2) Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A .

L'ensemble : (F) = $\{ M \in P \,/\, (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) \equiv -(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})[2\pi] \}$ est :

i) Le segment [AB] privé de A et B.

j) La demi droite [BA) privée de B.

k) La droite (AB) privée de la demi droite [BA).

Exercice 2 :(6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{x+1} & \text{si } x > 1 \\ 2\sqrt{x^2+3} - 2x + 1 & \text{si } x \le 1 \end{cases}$

1) Trouver une relation entre a et b pour que f soit continue en 1.
2) Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 1.

Dans la suite de l'exercice on prend a = 1 et b = 5.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) a) Montrer que f est dérivable en tout point x_o de $]1,+\infty[$ et que $f'(x_o) = \dfrac{-4}{(x_o+1)^2}$.

b) Montrer qu'il existe un seul point M_o d'abscisse $x_o > 1$ dont la tangente T à (C) en M_o soit parallèle à la droite Δ : $y = -\dfrac{1}{4}x - 1$.

4) a) Montrer que f est dérivable en tout point x_o de $]-\infty, 1[$ et calculer $f'(x_o)$.

b) Montrer que la droite D : $y = -3x + 4$ est une tangente à (C) en un point M_1 d'abscisse $x_1 < 1$.

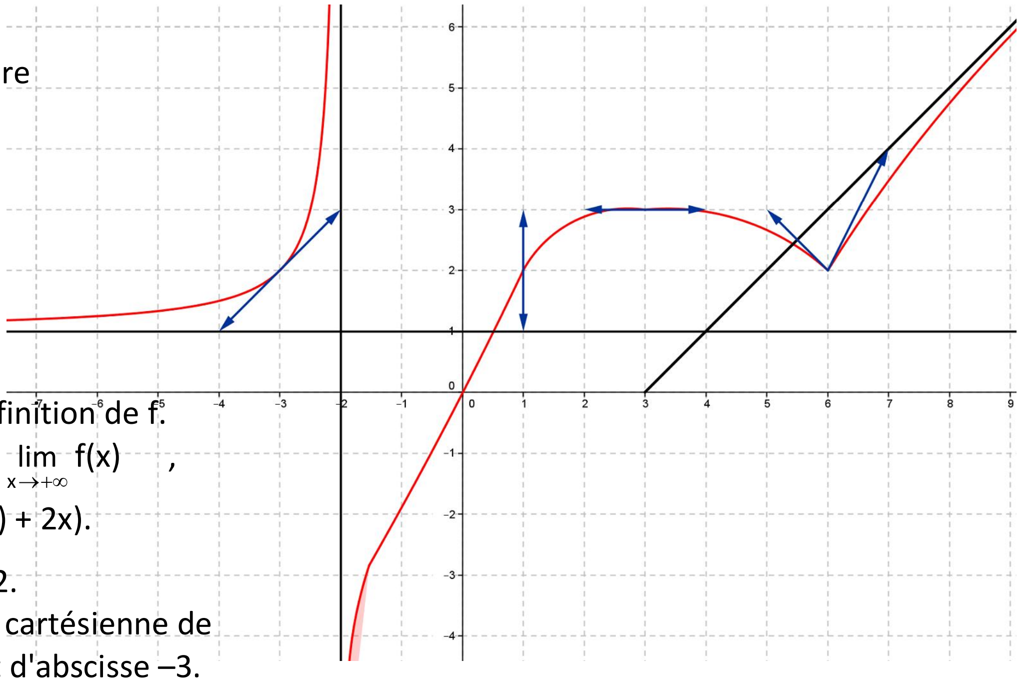
5) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+4x$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 3 :(5 points)

La courbe (C) ci–dessous est celle d'une fonction f . (C) admet trois asymptotes d'équation dont l'une a pour équation : $y = x - 3$.

En s'aidant du graphique répondre aux questions suivantes.



1) Donner le domaine de définition de f.
2) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) + 2x)$.
3) Etudier la limite de f en -2.
4) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) au point d'abscisse -3.
5) a)Déterminer en justifiant les limites suivantes :
   $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-2}{h}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x+1)-3}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to6^+}\dfrac{6-x}{f(x)-2}$.
   b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.
6) Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   a) Donner le domaine de définition de g.
   b) g est–elle prolongeable par continuité en -2 ?

Exercice 4 :(6 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle isocèle en A et tel que $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

1) Donner la mesure principale de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
2) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC. On considère les ensembles suivants :
   $(C_1) = \{ M \in P \,/\, (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi] \}$ $(C_2) = \{ M \in P \,/\, (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et $MB<MC\}$.
   a) Vérifier que $A \in (C_1)$, déduire alors les ensembles (C_1) et (C_2).
   b) Soit D un point de (C_2), E et F les projetés orthogonaux respectifs de D sur (BC) et sur (AC).
      Montrer que E , F, C et D appartiennent à un même cercle.
   c) Montrer que $(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FD}) \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})[2\pi]$.
3) Soit (C') le cercle de diamètre [AD]. (C') recoupe la droite (AB) en G.
   a) Montrer que $(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FG}) \equiv -(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})[2\pi]$.
   b) Montrer que les points E , F et G sont alignés.